Leçon n° 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans toute la suite on considérera G un groupe.

I/ Conjugaison dans un groupe.

A/ Action par conjugaison. [U] [PER]

Définition 1 : Action par conjugaison.

Définition 2 : Classes de conjugaison, conjugués.

Exemple 3 : Les classes de conjugaison d'un groupe abélien sont triviales.

Exemple 4 : Dans $\mathfrak{S}_n$, les p-cycles sont conjugués.

Exemple 5 : Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ A et B sont conjugués ssi semblables.

Définition 6 : Centralisateur.

Application 7 : Théorème de Wedderburn : tout anneau à division fini est commutatif.

B/ Étude de quelques classes de conjugaison. [U] [PER] [G]

Remarque 8 : Principe de conjugaison de Perrin : un élément conjugué est du même type qu'un élément de départ.

Exemple 9 : La conjugaison conserve l'ordre dans un groupe + si $s_D \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ rotation d'axe D et $\varphi \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ alors $\varphi \circ \sigma_D \circ \varphi^{-1} = s_{\varphi(D)}$ rotation d'axe $\varphi(D)$.

Théorème 10 : Décomposition des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

Définition 11 : Type d'une permutation.

Théorème 12 : Deux permutations sont conjuguées ssi elles ont même type.

Exemple 13 : $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ et $(1\ 3\ 4)(2\ 5)$ sont conjuguées par $\sigma = (2\ 3\ 4\ 5)$

Théorème 14 : Réduction de Frobenius.

Proposition 15 : $u,v \in \mathcal{L}(E)$ sont conjuguées ssi ont les mêmes facteurs invariants.

II/ Sous-groupes stables par conjugaison.

A/ Sous-groupes distingués. [U] [PER]

Définition 16 : Sous-groupes distingués.

Exemple 17 : $\{1\}$ et G sont distingués.

Exemple 18 : Si G abélien tous ces sous-groupes sont distingués, réciproque fausse avec $\mathbb{H}_8$ le groupe des quaternions : tout ces sous-groupes sont distingués mais il n'est pas abélien.

Proposition 19 : Image directe et réciproque d'un distingué.

Exemple 20 : $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$, de même pour SL_n dans GL_n.

Proposition 21 : Si $K \subset H \subset G$ et K distingué dans G alors K distingué dans H.

Contre-exemple 22 : Le groupe $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$ est distingué dans $V_4 = \{\mathrm{Id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ et V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et pourtant $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

B/ Groupes quotients. [U] [PER]

Définition 23 : Classes à gauche, droite, indice.

Proposition 24 : Les classes ont même cardinal que l'indice.

Théorème 25 : Théorème de Lagrange.

Proposition 26 : Si un sous-groupe est d'indice 2 alors il est distingué.

Application 27 : $\mathfrak{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Théorème 28 : Construction des groupes quotients par factorisation.

Exemple 29 : Construction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K})$.

Définition 30 : Sous-groupe dérivé.

Théorème 31 : Abélianisé d'un groupe.

Exemple 32 : $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$.

C/ Théorèmes d'isomorphismes. [U]

Théorème 33 : 1er théorème d'isomorphisme.

Application 34 : Les groupes cycliques d'ordre n sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 35 : 2ème théorème d'isomorphisme.

III/ Applications de la conjugaison.

A/ Cas des groupes simples et p-groupes. [U] [PER] [ROM]

Définition 36 : Groupe simple.

Exemple 37 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ simple ssi n premier.

Développement 1

Lemme 38 : Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

Théorème 39 : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Corollaire 40 : Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Définition 41 : p-groupes.

Proposition 42 : Les p-groupes ont un centre non trivial.

Corollaire 43 : Les groupes d'ordre p^2 sont toujours abéliens.

B/ Isomorphismes exceptionnels. [CAL]

Développement 2

Proposition 44 : Dénombrement sur les corps finis : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathbb{P}^n(F_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Lemme 45 : Si H est un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ alors $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Théorème 46 : Isomorphismes exceptionnels.

Références :

— [PER] Perrin p. 10, p. 15 et p. 82
— [U] Ulmer Théorie des groupes p. 5, p. 33, p. 45 et p. 57
— [G] Gourdon Algèbre p. 291
— [ROM] Rombaldi Algèbre 2nd éd. p. 50
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250